

10.1

a) $D x^8 = 8 \cdot x^{8-1}$ Alkuperäinen eksponentti siirtyy kertoimeksi.
EkspONENTTI pienenee yhdellä.
 $= 8x^7$

b) $D(5x^3) = 5 \cdot 3x^{3-1}$ Kerroin 5 säilyy ennallaan.
 $= 15x^2$

c) $D(-2x^6) = -2 \cdot 6x^{6-1} = -12x^5$

d) $D\left(\frac{1}{3}x^6\right) = \frac{1}{3} \cdot 6x^{6-1} = 2x^5$

Vastaus

a) $8x^7$ b) $15x^2$ c) $-12x^5$ d) $2x^5$

10.2

a) Derivoidaan funktio $f(x) = x^4 - x^3 + 2x - 3$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 3x^2 + 2 \cdot 1 - 0 && \text{Derivoidaan polynomifunktion} \\ &&& \text{jokainen termi.} \\ &= 4x^3 - 3x^2 + 2 \end{aligned}$$

b) Derivoidaan funktio $g(x) = 2x^6 + x^2 - x$.

$$g'(x) = 2 \cdot 6x^5 + 2x - 1 = 12x^5 + 2x - 1$$

Vastaus

a) $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2$

b) $g'(x) = 12x^5 + 2x - 1$

10.3

a) Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned}f'(x) &= D(-2x^3 + x^2 - x + 1) \\&= -2 \cdot 3x^{3-1} + 2x^{2-1} - 1 + 0 \\&= -6x^2 + 2x - 1\end{aligned}$$

Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdassa 2.

$$f'(2) = -6 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 1 = -21$$

b) Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned}f'(t) &= D(125t^2 - 110t) \\&= 125 \cdot 2t^{2-1} - 110 \\&= 250t - 110\end{aligned}$$

Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdassa 2.

$$f'(2) = 250 \cdot 2 - 110 = 390$$

Vastaus

a) $f'(2) = -21$

b) $f'(2) = 390$

10.4

a) Sievennetään lauseke ensin polynomiksi.

$$\begin{aligned}f(x) &= x^3(x-1) \\&= x^3 \cdot x + x^3 \cdot (-1) \\&= x^4 - x^3\end{aligned}$$

Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2$$

b) Sievennetään lauseke ensin polynomiksi.

$$\begin{aligned}g(x) &= x(x+1)^2 \\&= x(x+1)(x+1) \\&= x(x \cdot x + x \cdot 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot 1) \\&= x(x^2 + 2x + 1) \\&= x \cdot x^2 + x \cdot 2x + x \cdot 1 \\&= x^3 + 2x^2 + x\end{aligned}$$

Määritetään derivaattafunktio.

$$g'(x) = 3x^2 + 2 \cdot 2x + 1 = 3x^2 + 4x + 1$$

Vastaus

a) $f'(x) = 4x^3 - 3x^2$

b) $g'(x) = 3x^2 + 4x + 1$

10.5

Määritetään funktion $f(x) = x^3 + 12x^2$ derivaatafunkti.

$$f'(x) = 3x^2 + 12 \cdot 2x = 3x^2 + 24x$$

Ratkaistaan derivaatafunktion nollakohdat.

$$3x^2 + 24x = 0$$

Erotetaan yhteinen tekijä.

$$x \cdot (3x + 24) = 0$$

Käytetään tulon nollasääntöä.

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 3x + 24 = 0 \quad | -24$$

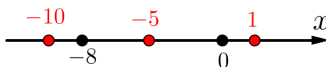
$$3x = -24 \quad | :3$$

$$x = -8$$

Derivaatafunktion nollakohdat ovat $x = -8$ ja $x = 0$.

Laaditaan derivaatafunktion merkkikaavio. Derivaatafunktion f' merkki voi vaihtua vain nollakohdissa -8 ja 0 . Päättellään derivaatafunktion merkit testaamalla.

$$f'(x) = 3x^2 + 24x$$



$$f'(-10) = 60 > 0 \quad +$$

$$f'(-5) = -45 < 0 \quad -$$

$$f'(-1) = 27 > 0 \quad +$$

$$f'(x) \quad + \quad -8 \quad - \quad 0 \quad +$$

Funktion f derivaatta on positiivinen, kun $x < -8$ tai $x > 0$.

Vastaus

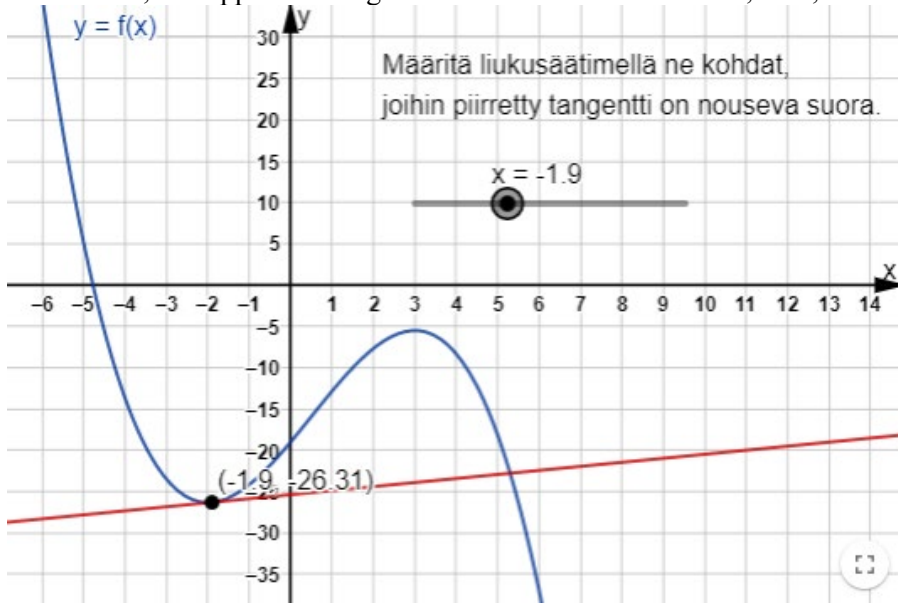
nollakohdat $x = -8$ ja $x = 0$,

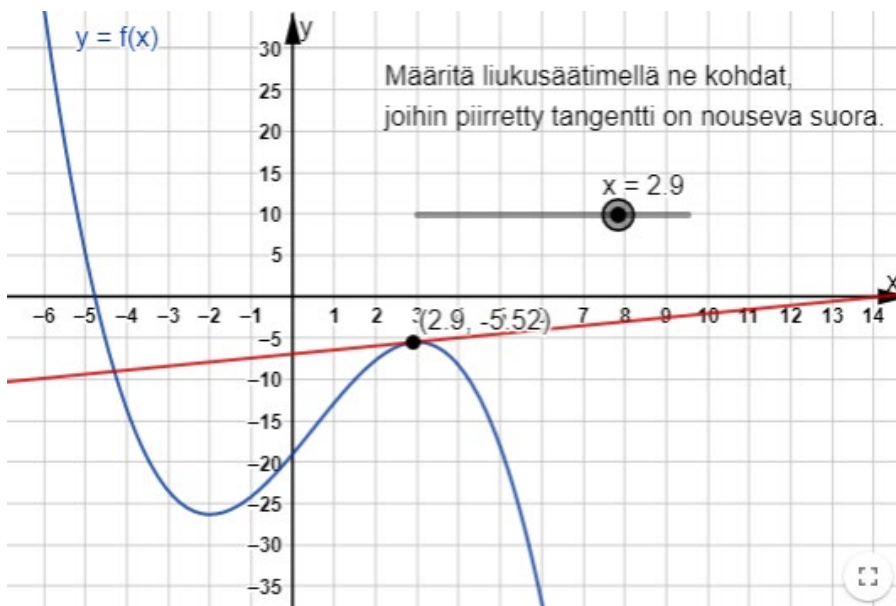
positiivinen, kun $x < -8$ tai $x > 0$

10.6

- a) Testataan appletin liikusäätimellä, milloin tangentti on nouseva.

Huomataan, että appletissa tangentti on nouseva x :n arvoilla $-1,9 - 2,9$.





- b) Tangentti on nouseva suora, kun sen kulmakerroin on positiivinen. Tangentin kulmakertoimen ilmaisee derivaatta. On määritettävä, millä muuttujan x arvoilla funktion f derivaatta on positiivinen.

Määritetään funktion $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x - 19$ derivaattafunktio.

$$f'(x) = -\frac{1}{3} \cdot 3x^2 + \frac{1}{2} \cdot 2x + 6 - 0 = -x^2 + x + 6$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$-x^2 + x + 6 = 0$$

$$a = -1, b = 1, c = 6$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \pm 5}{-2} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-1 + 5}{-2} = \frac{4}{-2} = -2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1 - 5}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Laaditaan derivaattafunktion merkkikaavio. Derivaattafunktion f' merkki voi vaihtua vain nollakohdissa -2 ja 3 . Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$f'(x) = -x^2 + x + 6$$

$$f'(-3) = -6 < 0 \qquad \qquad \qquad -$$

$$f'(0) = 6 > 0 \qquad \qquad \qquad +$$

$$f'(4) = -6 < 0 \qquad \qquad \qquad -$$

$$f'(x) \quad \begin{array}{ccccc} & -2 & & 3 & \\ & | & & | & \\ - & & + & & - \end{array}$$

Funktion f derivaatta on positiivinen, kun $-2 < x < 3$. Siten funktion f kuvaajalle piirretty tangentti on nouseva suora, kun $-2 < x < 3$.

Vastaus
 $-2 < x < 3$

10.7

$$\begin{aligned}\text{a) } f'(x) &= D(2x^3 - 5x + 4) \\ &= 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 1 + 0 \\ &= 6x^2 - 5\end{aligned}$$

Oikea vaihtoehto on $f'(x) = 6x^2 - 5$.

$$\begin{aligned}\text{b) } f'(x) &= D(3x^2 - 5x + 4) \\ &= 3 \cdot 2x - 5 \cdot 1 + 0 \\ &= 6x - 5\end{aligned}$$

Oikea vaihtoehto on $f'(x) = 6x - 5$.

$$\begin{aligned}\text{c) } f'(x) &= D(2x^5 - 5x^2 + 4x) \\ &= 2 \cdot 5x^4 - 5 \cdot 2x + 4 \cdot 1 \\ &= 10x^4 - 10x + 4\end{aligned}$$

Oikea vaihtoehto on $f'(x) = 10x^4 - 10x + 4$

10.8

- a) Hetkellisen putoamisnopeuden ilmaisee derivaattafunktio s' .
Derivoidaan funktio.

$$\begin{aligned}s'(t) &= D(4,9t^2) \\ &= 4,9 \cdot 2t \\ &= 9,8t\end{aligned}$$

Lasketaan putoamisnopeus ajanhetkellä $t = 2$ eli derivaattafunktion arvo kohdassa 2.

$$s'(2) = 9,8 \cdot 2 = 19,6 \approx 20 \text{ (m/s)}$$

- b) Lasketaan putoamisnopeus ajanhetkellä $t = 3$ eli derivaattafunktion arvo kohdassa 3.

$$s'(3) = 9,8 \cdot 3 = 29,4 \approx 29 \text{ (m/s)}$$

Vastaus

- a) 20 m/s b) 29 m/s

10.9

- a) Kuvaajalle kohtaan $x = 1$ piirretyn tangentin kulmakerroin on funktion f derivaatta kohdassa 1. Derivoidaan funktio ja lasketaan kulmakerroin.

$$f'(x) = -3x^2 + 0 = -3x^2$$

$$f'(1) = -3 \cdot 1^2 = -3$$

Tangentin kulmakerroin on -3 .

- b) Määritetään kuvaajan piste, johon tangentti piirretään.

Kun $x = 1$, niin $y = f(1) = -1^3 + 3 = 2$.

Tangentti piirretään kuvaajan pisteeseen $(1, 2)$ ja sen kulmakerroin on -3 . Määritetään tangentin yhtälö.

$$y - 2 = -3(x - 1)$$

$$y - 2 = -3x + 3$$

$$y = -3x + 5$$

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

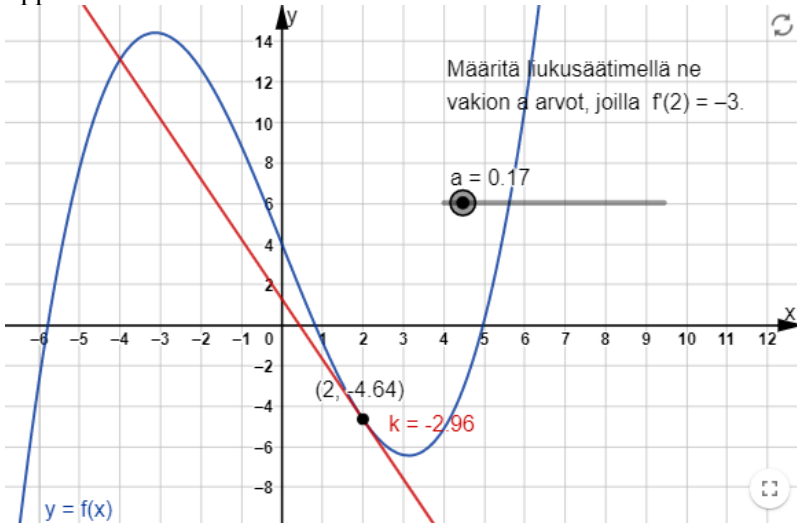
$$| +2$$

Vastaus

a) -3 b) $y = -3x + 5$

10.10

a) Appletilla:



b) Määritetään funktion $f(x) = ax^3 - 5x + 4$ derivaattafunktio.

$$f'(x) = a \cdot 3x^2 - 5 + 0 = 3ax^2 - 5$$

Ratkaistaan, millä vakion a arvolla $f'(2) = -3$.

$$f'(2) = -3$$

$$3a \cdot 2^2 - 5 = -3$$

$$12a - 5 = -3 \quad | +5$$

$$12a = 2 \quad | :12$$

$$a = \frac{2}{12} \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{6}$$

Vastaus

a) $a \approx 0,17$ **b)** $a = \frac{1}{6}$

10.11

a) $D 2x^3 = 2 \cdot 3x^{3-1} = 6x^2$

b) $D(-3x^{12}) = -3 \cdot 12x^{11} = -36x^{11}$

c) $D(\frac{2}{5}x^4) = \frac{2}{5} \cdot 4x^3 = \frac{8}{5}x^3$

d) $D \frac{x^8}{4} = D(\frac{1}{4}x^8) = \frac{1}{4} \cdot 8x^7 = 2x^7$

Vastaus

a) $6x^2$ b) $-36x^{11}$ c) $\frac{8}{5}x^3$ d) $2x^7$

10.12

a) Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned}f'(x) &= D(2x^8 - 5x^4 + 15x^3) \\&= 2 \cdot 8x^7 - 5 \cdot 4x^3 + 15 \cdot 3x^2 \\&= 16x^7 - 20x^3 + 45x^2\end{aligned}$$

Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdassa 1.

$$\begin{aligned}f'(1) &= 16 \cdot 1^7 - 20 \cdot 1^3 + 45 \cdot 1^2 \\&= 16 - 20 + 45 = 41\end{aligned}$$

b) Sievennetään lauseke ensin polynomiksi.

$$\begin{aligned}g(x) &= 4x(11 - 2x^4) \\&= 4x \cdot 11 + 4x \cdot (-2x^4) \\&= 44x - 8x^5\end{aligned}$$

Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned}g'(x) &= D(44x - 8x^5) \\&= 44 - 8 \cdot 5x^4 \\&= 44 - 40x^4\end{aligned}$$

Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdassa 1.

$$g'(1) = 44 - 40 \cdot 1^4 = 4$$

Vastaus

a) $f'(1) = 41$ **b)** $g'(1) = 4$

10.13

Määritetään funktion $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x$ derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot 3x^2 - 9 \cdot 2x^1 - 24 \\ &= 6x^2 - 18x - 24 \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$6x^2 - 18x - 24 = 0 \quad |:6$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$a = 1, \quad b = -3, \quad c = -4$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1}$$

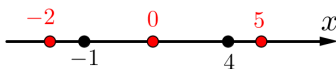
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{3+5}{2} = 4 \quad \text{tai} \quad x = \frac{3-5}{2} = -1$$

Laaditaan derivaattafunktion merkkikaavio. Derivaattafunktion f' merkki voi vaihtua vain nollakohdissa -1 ja 4 . Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$f'(x) = 6x^2 - 18x - 24$$



$$f'(-2) = 36 > 0 \quad +$$

$$f'(0) = -24 < 0 \quad -$$

$$f'(5) = 36 > 0 \quad +$$

$$f'(x) \quad - \quad -1 \quad + \quad 4 \quad -$$

Funktion f derivaatta on negatiivinen, kun $-1 < x < 4$.

Vastaus

$$-1 < x < 4$$

10.14

a) Lasketaan funktion $h(s) = -\frac{1}{9}s^9 - s^6$ arvo kohdassa -1 .

$$\begin{aligned}h(-1) &= -\frac{1}{9} \cdot (-1)^9 - (-1)^6 \\&= -\frac{1}{9} \cdot (-1) - 1 \\&= \frac{1}{9} - 1 = -\frac{8}{9}\end{aligned}$$

b) Derivoidaan funktio $h(s) = -\frac{1}{9}s^9 - s^6$.

$$h'(s) = -\frac{1}{9} \cdot 9s^8 - 6s^5 = -s^8 - 6s^5$$

Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdassa -1 .

$$\begin{aligned}h'(-1) &= -(-1)^8 - 6 \cdot (-1)^5 \\&= -1 - 6 \cdot (-1) \\&= -1 + 6 = 5\end{aligned}$$

Vastaus

a) $h(-1) = -\frac{8}{9}$ **b)** $h'(-1) = 5$

10.15

a) Lasketaan funktion $f(x) = x(x^2 - 75)$ arvo kohdassa 0.

$$f(0) = 0 \cdot (0^2 - 75) = 0$$

b) Ilmaistaan funktion f lauseke polynomina.

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x^2 - 75) \\ &= x \cdot x^2 + x \cdot (-75) \\ &= x^3 - 75x \end{aligned}$$

Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x) = 3x^2 - 75$$

Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdassa 0.

$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 75 = -75$$

c) Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 75 &= 0 & | +75 \\ 3x^2 &= 75 & | :3 \\ x^2 &= 25 \\ x &= \sqrt{25} = 5 \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{25} = -5 \end{aligned}$$

Vastaus

a) 0 **b)** -75 **c)** $x = -5$ ja $x = 5$

10.16

- a) Määritetään appletilla vakion p arvo niin, että kohtaan $x = 1$ piirretyn tangentin kulmakerroin on 4.



Appletin perusteella $p = 2$.

- b) Määritetään funktion $f(x) = 3x^4 - px^3 - x^2 + 1$ derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cdot 4x^3 - p \cdot 3x^2 - 2x^1 + 0 \\ &= 12x^3 - 3px^2 - 2x \end{aligned}$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakion p arvo.

$$\begin{aligned} f'(1) &= 4 \\ 12 \cdot 1^3 - 3p \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 &= 4 \\ 10 - 3p &= 4 && | -10 \\ -3p &= -6 && | :(-3) \\ p &= 2 \end{aligned}$$

Vastaus

$$p = 2$$

10.17

Määritetään kuvaajan piste, johon tangentti piirretään.

Kun $x = -1$, niin $y = f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 5 = 7$.

Tangentit piirretään kuvaajan pisteeseen $(-1, 7)$.

Funktion f kuvaajalla kohtaan $x = -1$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $f'(-1)$. Derivoidaan funktio $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 5$ ja lasketaan kulmakerroin.

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$$

$$f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 2 = -1$$

Tangentti kulkee pisteen $(-1, 7)$ kautta ja sen kulmakerroin on -1 . Määritetään tangentin yhtälö.

$$y - 7 = -1 \cdot (x - (-1))$$

$$y - 7 = -1 \cdot (x + 1)$$

$$y - 7 = -x - 1 \quad | +7$$

$$y = -x + 6$$

Vastaus

$$y = -x + 6$$

10.18

- a) Kiven hetkellisen nopeuden ilmaisee derivaattafunktio h' . Derivoidaan funktio $h(t) = 18t - 5t^2$.

$$\begin{aligned}h'(t) &= 18 - 5 \cdot 2t \\&= 18 - 10t\end{aligned}$$

Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdissa $t = 1$ ja $t = 2$.

$$h'(1) = 18 - 10 \cdot 1 = 8 \text{ (m/s)}$$

$$h'(2) = 18 - 10 \cdot 2 = -2 \text{ (m/s)}$$

Kiven nopeus maanpinnan suhteen yhden sekunnin kuluttua oli 8 m/s ja kahden sekunnin kuluttua -2 m/s.

- b) Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned}h'(t) &= 0 \\18 - 10t &= 0 \\t &= 1,8 \text{ (s)}\end{aligned}$$

Kivi oli hetkellisesti paikallaan ajanhetkellä 1,8 s.

- c) Kivi oli korkeimmillaan ajanhetkellä $t = 1,8$. Lasketaan funktion h arvo kohdassa $t = 1,8$.

$$h(1,8) = 18 \cdot 1,8 - 5 \cdot 1,8^2 = 16,2 \approx 16 \text{ (m)}$$

Kivi kävi korkeimmillaan 16 metrin korkeudessa.

Vastaus

- a) 8 m/s ja -2 m/s
b) 1,8 s
c) 16 m

10.19

Derivoidaan funktio $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 12$.

$$f'(x) = 3x^2 - 4 \cdot 2x + 7 = 3x^2 - 8x + 7$$

Ratkaistaan, millä muuttujan x arvoilla derivaatta on 3.

$$f'(x) = 3$$

$$3x^2 - 8x + 7 = 3 \quad | -3$$

$$3x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$a = 3, \quad b = -8, \quad c = 4$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} = \frac{8 \pm 4}{6}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{8+4}{6} = \frac{12}{6} = 2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{8-4}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Derivaatta on 3, kun $x = \frac{2}{3}$, ja kun $x = 2$.

Vastaus

$$x = \frac{2}{3} \quad \text{ja} \quad x = 2$$

10.20

Derivoidaan funktio $f(x) = x^2 + bx + c$.

$$f'(x) = 2x + b$$

Muodostetaan annetuista ehdoista kaksi yhtälöä.

$$f(1) = 2$$

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

$$1^2 + b \cdot 1 + c = 2$$

–1

$$b + c = 1$$

$$f'(1) = 5$$

$$f'(x) = 2x + b$$

$$2 \cdot 1 + b = 5 \quad | -2$$

$$b = 3$$

Nyt tiedetään, että $b = 3$. Ratkaistaan ensimmäisestä yhtälöstä c .

$$b + c = 1$$

$$b = 3$$

$$3 + c = 1$$

|-3

$$c = -2$$

Vastaus

$$b = 3 \text{ ja } c = -2$$

10.21

Suoran $y = -x + 3$ kulmakerroin on -1 , joten yhdensuuntaisen tangentin kulmakerroin on myös -1 . Pitää selvittää, missä kohdassa funktion

$g(x) = x^3 + x^2 - 2x + 5$ derivaatta on -1 .

Derivoidaan funktio g .

$$g'(x) = 3x^2 + 2x - 2$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan, milloin derivaatan arvo on -1 .

$$g'(x) = -1$$

$$3x^2 + 2x - 2 = -1 \quad | +1$$

$$3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm 4}{6}$$

$$x = \frac{-2+4}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-2-4}{6} = \frac{-6}{6} = -1$$

Tangentti piirretään kohtaan $x = -1$ tai kohtaan $x = \frac{1}{3}$.

Vastaus

kohtaan $x = -1$ tai kohtaan $x = \frac{1}{3}$

10.22

Säteen pituus t sekunnin kuluttua on t senttimetriä.

Tilavuuden kuutiosenttimetreinä t sekunnin kuluttua ilmaisee siis funktio

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi t^3.$$

Tilavuuden muutosnopeus on funktion V derivaatta.

$$V'(t) = \frac{4}{3}\pi \cdot 3t^2 = 4\pi t^2$$

Lasketaan muutosnopeus 5 ja 15 sekunnin kuluttua.

$$V'(5) = 4\pi \cdot 5^2 \approx 310 \text{ (cm}^3/\text{s)}$$

$$V'(15) = 4\pi \cdot 15^2 \approx 2800 \text{ (cm}^3/\text{s)}$$

Pallon tilavuus kasvaa 5 sekunnin kuluttua nopeudella $310 \text{ cm}^3/\text{s}$ ja 15 sekunnin kuluttua nopeudella $2800 \text{ cm}^3/\text{s}$.

Vastaus

$310 \text{ cm}^3/\text{s}$ ja $2800 \text{ cm}^3/\text{s}$